TEME RECAPITULATIVE
PENTRU SUBIECTUL I BACALAUREAT

MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

<u>Definiție:</u> Propoziție - un enunț despre care știm valoarea sa de adevăr.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Valoare de adevăr
p	negația	$\rceil p$	non p	Opusă propoziției p
p, q	conjuncția	$p \wedge q$	p și q	Este adevărată când propozițiile p și q sunt adevărate
p, q	disjuncția	$p \vee q$	p sau q	Este adevărată când cel puțin una dintre propoziții este adevărată
p, q	implicația	$p \to q$	p implică q	Este falsă când p este adevărată și q falsă
p, q	echivalența	$p \leftrightarrow q$	p echivalent cu q	Este adevărată când ambele au aceeași valoare de adevăr

<u>Definiție:</u> Predicat - un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care se transformă în propoziție prin valori date variabilelor.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Observații
p(x)	Propoziția universală	$\forall x, p(x)$	Pentru orice x are loc p(x)	Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general și nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziție este falsă.
p(x)	Propoziția existențială	$\exists x, p(x)$	Există x astfel încât are loc p(x)	Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu.Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil.

TIPURI SPECIALE DE RAȚIONAMENT

1. **METODA REDUCERII LA ABSURD** Pentru a demonstra o implicație de tipul $p \to q$, presupunem concluzia q ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza construim un raționament care conduce la contradicție.
2. **METODA INDUCŢIEI MATEMATICE**
   Fie P (n) o propoziţie care depinde de $\mathbf{n} \geq m$ – fixat $n, m \in \mathbf{N}$.
   Mod de lucru

Etapa I Se verifică dacă propoziţia este adevărată pentru valori particulare : $n = m \Rightarrow$

$P(m)$ – adevărată, $n = m + 1 \Rightarrow P(m + 1)$ – adevărată etc.

Etapa a II - a a) Presupunem că s-a verificat veridicitatea „ afirmaţiei P(n) ” până la o valoare oarecare k şi a rezultat, de fiecare dată, P(k) „adevărat”;

b) Scriem forma propoziţiei pentru k+1 – adică determinăm forma propoziţiei P(k+1);

c) Demonstrăm că din P(k) – adevărată, rezultă (după calcule) că P(k+1) – adevărată;

d) Concluzia: P(n) – adevărată , $\forall$ $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m$.

SUME REMARCABILE

1) $S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n termeni}} = n, \ \forall \ n \in \mathbf{N};$

2) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall \ n \in \mathbf{N};$

3) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall \ n \in \mathbf{N};$

4) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in N.$

RELAȚII SAU OPERAȚII

Relații sau operații	**Notație**	**Definiție**
Incluziunea	$A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B)$
Egalitatea	$A=B$	$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ și $B \subseteq A)$
Reuniunea	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$
Intersecția	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$
Diferența	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ și $x \notin B \}$
Produsul cartezian	AxB	$AxB=\{(x,y)/ x \in A$ și $y \in B\}$
Complementara unei submulţimi	$C_E A$	$C_E A = \{x \in E \mid x \notin A \}$. $A \subseteq E$

MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE $\mathbf{N = \{0; 1;\ldots; n;\ldots\}}$;

Mulţimea numerelor naturale nenule: $\mathbf{N^* = N \setminus \{0\}}$

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI $\mathbf{Z = \{\ldots,- n ,\ldots, -2, -1, 0, 1, 2,\ldots, n,\ldots\}}$;

Mulţimea numerelor întregi nenule: $\mathbf{Z^* = Z \setminus \{0\}}$

MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE $\mathbf{Q = \{ \frac{a}{b} \ / \ a \in Z , b \in Z^*\}}$.

Mulţimea numerelor raţionale nenule: $\mathbf{Q^* = Q \setminus \{0\}}$

MULŢIMEA NUMERELOR REALE $\mathbf{R}$

Mulţimea numerelor reale nenule: $\mathbf{R^* = R \setminus \{0\}}$

Scrierea numerelor reale $x = a_0,a_1a_2\dots a_n\dots$ unde $x = [x] + \{x\}$;

$[x]$ – se numeşte **partea întreagă** a numărului x,
$\{x\}$ – se numeşte **partea fracţionară** a numărului x.

$$[x] = \begin{cases} a_0\,, \text{ dacă } x>0 \\ -1+a_0\,, \text{ dacă } x<0 \end{cases}, \quad \text{iar } \{x\} = \begin{cases} 0,a_1a_2\dots a_n\dots\,, \text{ dacă } x>0 \\ 1-0,a_1a_2\dots a_n\dots\,, \text{ dacă } x<0 \end{cases}$$

Observaţie: Avem: $\{x\} = x - [x]$, cu condiţiile $[x] \le x < [x] + 1$; sau $x - 1 < [x] \le x$;

MODULUL SAU VALOAREA ABSOLUTĂ

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x<0, \\ 0, \text{ dacă } x=0, \\ x, \text{ dacă } x>0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x<0, \\ x, \text{ dacă } x\ge 0 \end{cases}$$

Observaţii: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$;

$$|x| > a,\ a>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x<-a \\ \text{sau} \\ x>a \end{cases}; \quad |x| \ge a,\ a>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -a \\ \text{sau} \\ x\ge a \end{cases};$$

INTERVALE

$(a, b) = \{x\in R \mid a< x<b\}$ – **interval deschis**;
$[a, b] = \{x\in R \mid a\le x \le b\}$ – **interval închis**;
$(a, b] = \{x\in R \mid a<x \le b\}$ – **interval deschis la stânga şi închis la dreapta**;
$[a, b) = \{x\in R \mid a\le x<b\}$ – **interval închis la stânga şi deschis la dreapta**;
$(-\infty, a) =\{x\in R \mid x< a\}$ – **interval nemărginit la stânga şi deschis la dreapta**;
$(-\infty, a] = \{x\in R \mid x \le a\}$ – **interval nemarginit la stânga şi închis la dreapta**;
$(a, +\infty) = \{x\in R \mid a< x\}$ – **interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta**;
$[a, +\infty) = \{x\in R \mid a\le x\}$ – **interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta**;
$(-a, a) = \{x\in R \mid \lvert x\rvert < a\} \Leftrightarrow -a < x< a$; **– interval (deschis) simetric sau interval centrat în 0;**
$[-a, a] = \{x\in R \mid \lvert x\rvert \le a\} \Leftrightarrow -a \le x \le a$; – **interval (închis) simetric sau interval centrat în 0**;
$(-\infty,-a] \cup [a,+\infty) = \{x\in R \mid \lvert x\rvert \ge a, a>0\}$; – **este interval simetric sau interval centrat în 0**;
$(-\infty,-a) \cup (a,+\infty) = \{x\in R \mid \lvert x\rvert > a, a>0\}$; – **este interval simetric sau interval centrat în 0.**

MULŢIMEA NUMERELOR IRAŢIONALE **$R \setminus Q$**;

Radical de ordinul n **dintr-un număr pozitiv (rădăcina pătrată)** $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a},\ \forall a \in R_+$;

Forma numerelor pătratice **Numerele pătratice** sunt de **forma**: $\mathbf{z = a + b}\sqrt{d}$**,** unde **d** este liber de pătrate.

Teorema împărţirii cu rest a = bq + r, a – deîmpărţit, b – împărţitor $b \neq 0$, q – cât, r – rest, $0 \le r < |b|$.

Media aritmetică: a **n** numere reale – $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este dată de formula: $M_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$;

Media geometrică (sau media proporţională): a **două** numere reale şi pozitive a, b este dată de formula: $M_g = \sqrt{ab}$; sau $\left(\dfrac{M_g}{a} = \dfrac{b}{M_g}\right)$; media geometrică a **n** numere reale şi pozitive: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este dată de formula: $M_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$;

Media armonică a **două** numere $a, b \in \mathbf{R}^*$ este dată de formula: $M_h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$;

media armonică a **n** numere reale nenule: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^*$ este dată de formula : $M_h = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$;

Inegalitatea mediilor: $M_h \le M_g \le M_a$ sau : $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

MULŢIMEA NUMERELOR COMPLEXE $\mathbf{C} = \{z / z = x + yi, \text{ unde } x, y \in \mathbf{R} \text{ şi } i^2 = -1\}$,

sau: $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) / x \in \mathbf{R} \text{ şi } y \in \mathbf{R}\}$; unde (x,y) – este o pereche ordonată;

Un număr complex are:

– o **parte reală** a sa notată : $x = \mathrm{Re}(z)$, şi
– o **parte imaginară** a sa notată : yi; $y = \mathrm{Im}(z)$.

Mulţimea numerelor complexe nenule: $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$

Egalitatea a două numere complexe

Fie numerele complexe: $z_1 = x_1 + y_1 i$ şi $z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Operaţii cu numere complexe

Adunarea

Fie numerele complexe :

$z_1 = x_1 + y_1 i$ şi $z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$;

Înmulţirea

Fie numerele complexe :

$z_1 = x_1 + y_1 i$ şi $z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) i$;

Modulul unui număr complex

Fie numărul complex: $z = x + yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Conjugatul unui număr complex

Fie numărul complex: $z = x + yi \Rightarrow$ numărul complex de forma : $\bar{z} = x - yi$ este **conjugatul** numărului complex z.

Inversul unui număr comnplex

Fie numărul complex: $z = x + yi \Rightarrow$ numărul complex de forma : $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$;

este **inversul** numărului complex z .

Proprietăţile operaţiilor cu numere complexe

Proprietăţile adunării

i) **asociativă**: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in C$;
ii) **comutativă**: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in C$;
iii) **elementul neutru** este numărul: $0 = 0 + 0i$, $z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in C$;
iv) **elementul opus** (**elementul simetric**): este numărul complex: $-z = -x - yi$, pentru care avem :
$z + (-z) = (-z) + z = 0, \forall z \in C$

Proprietăţile înmulţirii

i) **asociativă**: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in C$;
ii) **comutativă**: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in C$;
iii) **elementul neutru** este numărul: $1 = 1 + 0i$, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in C$;
iv) **elementul invers** (**elementul simetric**): este numărul complex:
$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$; pentru care avem : $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1, \forall z \in C$

Proprietăţile modulului

i) $|z| \geq 0, \forall z \in C$;
ii) $|z| = 0, \Leftrightarrow z = 0$;
iii) $|\bar{z}| = |z|, \forall z \in C$;
iv) $|\bar{z} z| = |z|^2, \forall z \in C$;
v) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \forall z_1, z_2 \in C$;
vi) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1 \in C, \forall z_2 \in C^*$;
vii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in C$;

Proprietăţile conjugatului

i) $z + \bar{z} = 2 \cdot x \in R, \forall z \in C$;
ii) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in R, \forall z \in C$;

iii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \forall\ z_1, z_2 \in C;$

iv) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \forall\ z_1, z_2 \in C;$

v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \forall\ z_1, z_2 \in C;$

vi) $\overline{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{|\overline{z}_1|}{|\overline{z}_2|}, \forall\ z_1 \in C, \forall\ z_2 \in C^*;$

Rezolvarea completă a ecuaţiei de gradul doi

Ecuaţia de gradul doi : $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $\mathbf{a \neq 0}$

$$\text{dacă } \Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a},\quad S = \left\{\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\},\quad x_1 \neq x_2.$$

PROGRESIA ARITMETICĂ Un şir : $(a_n)_{n \geq 1}$ este **progresie aritmetică** $\Leftrightarrow$ oricare termen se obţine din precedentul, cu excepţia primului, prin adunarea unei constante nenule numite **raţie** $a_n = a_{n-1} + r$

Raţia

$$\mathbf{r = a_n - a_{n-1}}$$

Termenul general

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r;}$$

Teoremă

Între trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice are loc relaţia :

$$\mathbf{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

Suma

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2};$$

$$\text{sau : } S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2}.$$

PROGRESIA GEOMETRICĂ Un şir : $(b_n)_{n \geq 1}$ este **progresie geometrică** $\Leftrightarrow$ oricare termen se obţine din precedentul, cu excepţia primului, prin înmulţirea cu o constantă nenulă numite **raţie** $b_n = b_{n-1} \cdot q$

Raţia

$$\mathbf{q} = \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

Termenul general

$$\mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{n-1};}$$

Teoremă

Între trei termeni consecutivi şi pozitivi

$b_{n-1} \geq 0$, $b_n \geq 0$, $b_{n+1} \geq 0$, ai unei progresii geometrice are loc relaţia :

$$\mathbf{b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}} \quad \text{sau} \quad \mathbf{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Suma

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n b_1, & q = 1 \end{cases}$$

ANALIZĂ COMBINATORIE

PERMUTĂRI Se numesc **permutări** ale unei mulţimi A cu **n** elemente – toate mulţimile ordonate care se pot forma cu cele **n** elemente ale mulţimii A. $\mathbf{P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!}$, $P_0 = 0! = 1$

$$P_n = n P_{n-1} \quad \text{sau} \quad n! = (n-1)! \cdot n;$$

ARANJAMENTE Se numesc **aranjamente** toate submulţimile ordonate cu câte **k** elemente care se pot forma din cele **n** elemete ale unei mulţimi A.

$$A_n^k = \mathbf{n(n-1)\ldots(n-k+1)} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}; \ \mathbf{n \geq k \geq 0.} \qquad A_n^n = P_n$$

COMBINĂRi Se numesc **Combinări** toate submulţimile cu câte **k** elemente care se pot forma din cele **n** elemete ale unei mulţimi A.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}; \quad \mathbf{n \geq k \geq 0.}$$

Proprietăţi

1) **Combinări complementare**: $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

BINOMUL LUI NEWTON $\mathbf{(a+b)^n} = C_n^0 \mathbf{a^n} + C_n^1 \mathbf{a^{n-1} b} + C_n^2 \mathbf{a^{n-2} b^2} + \ldots + C_n^k \mathbf{a^{n-k} b^k} + \ldots + C_n^n \mathbf{b^n}$.

Proprietăţi

1) Dezvoltarea are **n + 1** termeni;

2) **Termenul general** de rang k + 1 este: $\mathbf{T_{k+1}} = C_n^k \mathbf{a^{n-k} b^k}$;

3) Coeficineţii binomiali ai termenilor egali depărtaţi de extremi sunt egali

4) **Formula lui Pascal** – numărul submulţimilor unei mulţimi cu **n** elemente –**formulă particulară**

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = \mathbf{2^n}.$$

Formule de calcul prescurtat

Aplicaţii ale Binomului lui NEWTON

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a\,b + b^2 = (a+b)^2\ ;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a\,b + b^2 = (a-b)^2\ ;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a\,b^2 + b^3; \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 b + 3a\,b^2 + b^3 = (a+b)^3\ ;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3a\,b^2 - b^3; \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 b + 3a\,b^2 - b^3 = (a-b)^3\ ;$$

Alte formule de calcul prescurtat

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\ ;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\ ;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\ ;$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\ ;$$

Alte formule de calcul

Aplicaţii ale Binomului lui NEWTON

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}.$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$$

LOGARITMI

Fie $a \in R_+^*$, $a \neq 1$, $b \in R_+^*$, $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b.$

Logaritmi zecimali

Dacă: $a = 10 \Rightarrow$ notăm: $\log_{10} a = \lg a$;

Logaritmi naturali

Dacă: $a = e$ unde $e = 2{,}718281828\ldots \Rightarrow$ notăm: $\log_e a = \ln a$;

Proprietăţi

1) $\log_a 1 = 0$;
2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a a^{\alpha} = \alpha$;
4) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$;
5) $\log_a (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + + \log_a A_n$;
6) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$;
7) $\log_a A^m = m \log_a A$;
8) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$;

Formula schimbării bazei

$$\log_a A = \log_a b \log_b A \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a};$$

Inegalităţi

Dacă: $a > 1$ şi $x > y > 0 \Rightarrow \log_e x > \log_e y$;

Dacă: $0 < a < 1$ şi $x > y > 0 \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

MATEMATICI FINANCIARE

Procente: $\frac{p}{100}$, unde $p \in Q_+$, se scrie şi sub forma: p%;

Din $\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \Rightarrow a = \frac{b \cdot p}{100}$; $b = \frac{100 \cdot a}{p}$; $p = \frac{100 \cdot a}{b}$.

Taxa pe valoarea adăugată (TVA) este un impozit indirect exprimat în procente, stabilit și perceput de stat asupra valorii adăugate în fiecare stadiu al producției și al distribuției bunurilor economice. Cota de impozitare este fixă și unică pe o anumită perioadă de timp. În România sunt în vigoare 3 cote de TVA: o cotă standard: 19% și două cote reduse: 9% și 5%.

Pv. = Pp. +TVA, Pv. – preț de vânzare, Pp. – preț de producție.

TVA = $\frac{p}{100} \cdot$ **Pp.** , $\frac{p}{100}$ - cota de impozitare.

Probabilitatea unui eveniment A : Formula lui Laplace: **P(A)** = $\frac{\text{cazuri favorabile}}{\text{cazuri posibile}}$

Creştere procentuală 1) Dacă o mărime S **creşte** cu p%$\Rightarrow$

noua valoare S_1 este: $S_1 = S + S\frac{p}{100} = S\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S\ \frac{100+p}{100}$

2) Dacă o mărime S **creşte succesiv** cu p% şi q%$\Rightarrow$ noua valoare S'_1 este:

$$S'_1 = S\left(1 + \frac{p}{100}\right) + S\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100} = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{q}{100}\right) = S\,\frac{100+p}{100}\,\frac{100+q}{100}$$

Descreştere procentuală 1) Dacă o mărime S **descreşte** cu p%$\Rightarrow$

noua valoare S_1 este: $S_1 = S - S\frac{p}{100} = S\left(1 - \frac{p}{100}\right) = S$

2) Dacă o mărime S **descreşte succesiv** cu p% şi q% $\Rightarrow$ noua valoare S'_1 este:

$$S'_1 = S\left(1 - \frac{p}{100}\right) - S\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100} = S\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) = S\,\frac{100-p}{100}\,\frac{100-q}{100}$$

Dobândă simplă O altă **sumă plătită în plus** (băncilor) la restituirea sumei iniţiale se numeşte **dobândă**.
Dobânda simplă : D este dobânda calculată asupra sumei depuse (împrumutată) pe toată perioada depunerii (împrumutului).
Raportul procentual r % dintre dobândă şu capitalul (de împrumut sau depus) se numeşte **rata dobânzii**.

$D = S \cdot n \cdot \frac{r}{100}$; S = suma; n = numărul de ani; r = rata anuală a dobânzii.

Dobânda pe fracţiuni de ani $D = S\ \frac{r}{100}\ \frac{t_k}{k}$; k = numărul de părţi egale dintr – un an;

t_k= numărul efectiv de părţi egale pentru care se calculează dobânda.

Dobânda compusă D_c – dobânzile simple produse pentru fiecare perioadă de plasare sunt plasate în capital şi produc la rândul lor dobândă.

– în primul an : $D_1 = S\dfrac{r}{100}$;

– suma după primul an este: $S_1 = S + D_1 = S + S\dfrac{r}{100} = SR$; $\quad R = 1 + \dfrac{r}{100}$

– dobâna obţinută după **n** ani este: $D_n = (R-1)S\,R^n$;

– suma după **n** ani este: $S_n = SR^n$; $\quad R = 1 + \dfrac{r}{100}$.

Dobânda compusă totală este : $D_c = S\,(R^n - 1)$. Sau: $D_c = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$

PUTERI

1) $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ factori}, \forall a \in R^*$

2) $a^m\cdot a^n = a^{m+n}, \ \forall a\in R^* \ \forall m, n\in N$ (sau Z,Q);

3) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n, \ \forall a, b\in R^*, \forall n\in N$ (sau Z;Q);

5) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}, \ \forall a\in R^* \ \forall m, n\in N$ (sau Z,Q);

6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \forall a\in R, \forall \ b \in R^*, \forall n \in N$ (sau Z,Q);

7) $a^0 = 1, \ \forall \ a \in R^*$,

8) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \ \forall \ a \in R^*, \forall n \in N$ (sau Z, Q);

9) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n, \forall a, b \in R^*, \forall n\in N$ (Z,Q).

RADICAL DE ORDINUL n DINTR-UN NUMĂR POZITIV (RĂDĂCINA PĂTRATĂ)

<u>Definiţie</u>: $x^n = a, \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}, \ \forall a \in R_+$;

Proprietăţi

1) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, dacă $a\in R$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \ \forall \ a, b \in R_+$;

3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \forall \ a \ge 0, \ b > 0$;

4) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\forall a > 0$;

5) $\sqrt[mn]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^p}$, $\forall\ a > 0$;

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\forall\ a \geq 0$;

7) Egalitatea radicalilor dublii : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$,

dacă $A > 0$, $B > 0$, $A^2 - B > 0$.

8) Scoaterea factorului de sub radical : $\sqrt{a^{2k} b} = |a|^k \sqrt{b}$; $b > 0$;

9) Introducerea factorului sub radical : $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$; $a, b > 0$;

Raţionalizarea numitorilor

i) dacă numitorul este o expresie de forma: $\sqrt[n]{a^m}$ expresia conjugată este de forma: $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, pentru n = 2 avem: $\sqrt{a}$ cu expresia conjugată de forma $\sqrt{a}$;
ii) dacă numitorul este o expresie de forma: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ conjugata este expresia: $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (semnele se corespund);
iii) dacă numitorul este o expresie de forma: $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ conjugata este expresia: $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ (semnele se corespund);

iv) dacă numitorul este o expresie de forma: $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ conjugata este expresia: $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ (semnele se corespund).

Observaţie: Valoarea radicalului de **ordin par** este întotdeauna un număr pozitiv.

***Atenţie la greşelile tipice* (dăm mai jos relaţiile corecte)**

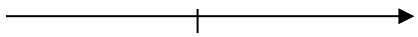
1) $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\forall\ a, b \geq 0$;
2) $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$; $\forall\ a, b \geq 0$;
3) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$;
4) $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$.

FUNCŢII

Noţiuni introductive

Axa

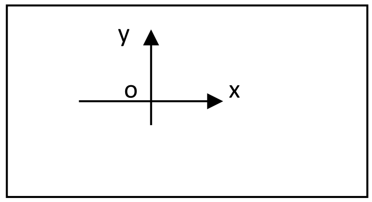
O dreaptă pe care se fixează un punct O numit **origine**, un **sens pozitiv** (opusul se numeşte **sens negativ**)



„–” sens negativ 0 sens pozitiv „+” şi un segment OA numit **unitate de măsură** O |———|A

Reper cartezian

Două axe cu aceeaşi origine şi aceeaşi unitate de măsură (în general) care formează un unghi drept se numeşte **reper cartezian**; Ox – axa **absciselor** (de obicei orizontală); Oy – axa **ordonatelor** (de obicei verticală);



Definiţia funcţiei

Fie elementele:

1) mulţimile: A–numită: ***domeniul de definiţie,***
B–numită: ***codomeniu sau mulţimea valorilor*** *funcţiei sau mulţimea în care funcţia ia valori.*

2) y = f(x) – *legea de corespondenţă (procedeul)* care face ca fiecărui element x din mulţimea A să-i corespundă un singur element y din mulţimea B.

Notaţie

$f : A \to B$, sau $A \xrightarrow{f} B$ (citim funcţia f definită pe domeniul de definiţie A cu valori în mulţimea codomeniu B), $\forall\, x \in A$; $\exists\ y \in B$ astfel încât are loc relaţia: y = f (x),. Semnele: $\forall$ – citim: oricare ar fi un x din mulţimea A şi $\exists$ (aici) citim: există un y din mulţimea B.

Funcţii egale

Două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt egale dacă: $\begin{cases} A = C \\ B = D \\ f(x) = g(x), \forall\, x \in A \end{cases}$

Funcţii numerice

Fie funcţia $f : A \to B$, f – este o **funcţie numerică** dacă mulţimile $A, B \subset \mathbf{R}$;

Graficul funcţiei

$G_f = \{(x, y) / \forall\, x \in A \text{ şi } \exists\, y \in B;\ y = f(x)\}$ sau: $G_f = \{(x, f(x)) / \forall\, x \in A\}$

Moduri de definire a unei funcţiei

1) printr–un tabel;
2) prin diagrame;
3)printr-o formulă / mai multe formule.

FUNCŢII SPECIALE

Funcţii injective

Fie funcţia $f : A \to B$, f – **injectivă** $\Leftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$, sau
f – **injectivă** $\Leftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A$ din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Observaţii: 1) Funcţiile numerice sunt injective dacă oriceparalelă la axa OX intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.
2) Dacă funcţia f este injectivă şi ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţie atunci aceasta este unică.

Funcţii surjective

Fie funcţia $f : A \to B$, f – **surjectivă** $\Leftrightarrow \forall\ y \in B, \exists\ x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

Observaţii : 1) Funcţiile numerice sunt surjective dacă orice paralelă la axa OX intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.
2) Dacă funcţia f este surjectivă atunci $f(A) = B$

Funcţii bijective

Fie funcţia $f : A \to B$, f – **bijectivă** $\Leftrightarrow$ f este simultan **injectivă** şi **surjectivă**.

Observaţii : 1) Funcţiile numerice sunt bijective dacă orice paralelă la axa OX intersectează graficul funcţiei într-un singur punct.
2) Dacă funcţia f este bijectivă atunci ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie unică.

COMPUNEREA FUNCŢIILOR

Fie funcţiile: $f : A \to B$ şi $g : B \to C \Rightarrow \exists$ funcţia $h : A \to C$, $h(x) = g(f(x))$, pentru orice argument $x \in A$.

Notaţie

$$\mathbf{h = g \circ f \Rightarrow h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))}.$$

Proprietăţi

1) Compunerea funcţiilor este asociativă: $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$;

2) Compunerea funcţiilor nu este întotdeauna comutativă: $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

Operaţii algebrice cu funcţii

Fie funcţiile $f, g : D \to R$

Adunarea

Funcţia $f + g : D \to R$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ – se numeşte **funcţia sumă** a lui f şi g.

Scăderea

Funcţia $f – g : D \to R$, $(f – g)(x) = f(x) – g(x)$ – se numeşte **funcţia diferenţă** a lui f şi g.

Înmulţirea

Funcţia $f \cdot g : D \to R$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ – se numeşte **funcţia produs** a lui f şi g.

Împărţirea

Funcţia $\frac{f}{g} : D \to R$, şi $g(x) \neq 0$, $\forall\ x \in D$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ – se numeşte **funcţia cât** a lui f şi g.

FUNCŢII MONOTONE

Funcţii crescătoare respectiv (funcţii strict crescătoare)

Fie funcţia $f : A \to B$, funcţia f este **crescătoare** $\Leftrightarrow$ $\forall\ x_1, x_2 \in A$ şi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, sau $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$, respectiv $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$, respectiv $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\right)$

Funcţii descrescătoare respectiv (funcţii strict descrescătoare)

Fie funcţia $f : A \to B$, funcţia f este **descrescătoare** $\Leftrightarrow$ $\forall\ x_1, x_2 \in A$ şi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, sau $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$, respectiv $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, respectiv $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\right)$

Funcţia identică (unitate)

Funcţiile : $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ şi $1_B : B \to B$, $1_B(y) = y$.

Funcţia inversă

Fie funcţia $f : A \to B$, f – este **inversabilă** $\Leftrightarrow \exists$ o funcţie $g : B \to A$ astfel încât: $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f = 1_A$;

Notaţie

Notăm funcţia inversă g astfel : $\mathbf{g = f^{-1}}$

Teoremă

O funcţie este **inversabilă** dacă şi numai dacă este bijectivă.

Observaţie: Graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

FUNCŢIA LINIARĂ (DE GRADUL ÎNTÂI)

<u>**Definiţie**</u>: O funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $\mathbf{f(x) = ax + b}$, unde $a \in R^*$, $b \in R$, se numeşte **funcţie liniară**.

Precizări

1) Graficul funcţiei este o **dreaptă**, deci pentru reprezentarea grafică e nevoie de două puncte distincte care aparţin graficului;
2) Condiţii ce se impun ca un punct să aparţină graficului: $A(x_A, y_A) \in G_f \Leftrightarrow f(x_A) = y_A$;

3) Dacă sunt precizate două puncte A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) prin care trece graficul funcţiei atunci rezolvăm sistemul $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f(x_B) = y_B \end{cases}$ în nedeterminatele a, b.

Tipuri de grafice pentru funcţia de gradul întâi

1) Dacă A = **R** graficul este o **dreaptă**;
2) Dacă A este un interval nemărginit şi deschis (închis) la o margine atunci graficul este o **semidreaptă deschisă (închisă)** la acea margine;
3) Dacă A este un interval mărginit deschis (deschis la stânga şi închis la dreapta / închis la stânga şi deschis la dreapta / închis) atunci graficul este un **segment deschis** (deschis la stânga şi închis la dreapta / închis la stânga şi deschis la dreapta / închis);
4) Dacă A este o reuniune de intervale mărginite atunci graficul funcţiei este o reuniune de **segmente**;
5) Dacă A este o reuniune de intervale cel puţin unul nemărginit atunci graficul funcţiei este o reuniune de **segmente şi (o) semidreptă (e)**;
6) Dacă A este o mulţime finită de valori atunci graficul funcţiei este o **mulţime de puncte izolate**, (**discrete**).

Discuţie

1) Dacă b = 0 $\Rightarrow$ f(x) = ax, atunci graficul trece prin originea sistemului de axe;
2) Dacă b = 0 $\Rightarrow$ f(x) = x atunci graficul trece prin originea sistemului de axe şi se numeşte **prima bisectoare** a sistemului de coordonate;
3) Dacă b = 0 $\Rightarrow$ f(x) = – x atunci graficul trece prin originea sistemului de axe şi se numeşte **a doua bisectoare** a sistemului de coordonate;
4) Dacă a = 0 $\Rightarrow$ f(x) = b atunci funcţia este constantă, iar graficul este o **dreaptă paralelă** cu axa Ox.

Semnul funcţiei de gradul întâi

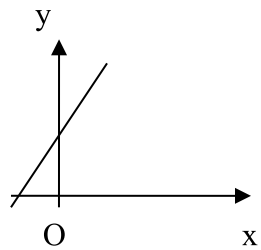
Fie funcţia f : **R** $\rightarrow$ **R** de forma f (x) = ax + b, unde a $\in$ **R***, b $\in$ **R**,

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
y= f(x) = ax + b	Semn contrar lui **a**	0	semnul lui **a**

Monotonia funcţiei de gradul întâi

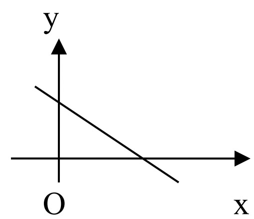
Fie funcţia f : **R** $\rightarrow$ **R** de forma f (x) = ax + b, unde a $\in$ **R***, b $\in$ **R**,

1) pentru a > 0 funcţia este **strict crescătoare**;



x	$-\infty$ $\quad\quad -\frac{b}{a} \quad\quad$ $+\infty$
y= f(x) = ax + b	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ 0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

2) pentru a < 0 funcţia este **strict descrescătoare**;



x	$-\infty$ $\quad\quad -\frac{b}{a} \quad\quad$ $+\infty$
y= f(x) = ax + b	↘ ↘ ↘ ↘ 0 ↘ ↘ ↘ ↘

FUNCŢIA DE GRADUL DOI

Definiţie: O funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + b x + c}$, unde $a \in \mathbf{R}^*$, b, $c \in \mathbf{R}$, se numeşte **funcţia de gradul doi**.

Forma canonică a funcţiei de gradul doi

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $f(x)= ax^2 + b x + c$, unde $a \in \mathbf{R}^*$, b, $c \in \mathbf{R}$, are **forma canonică**

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + b x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}.$$

Graficul

Graficul funcţiei de gradul doi este o parabolă;

Etapele reprezentării grafice

a) **Intersecţia** cu axa OX : $OX \cap G_f$ dacă $\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$ Se rezolvă ecuaţia : $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, $c \in R$, $a \neq 0$;

b) **Intersecţia** cu axa OY : $OY \cap G_f$ dacă $\begin{cases} x = 0 \in D_f \\ f(0) = c \end{cases}$ unde D_f este domeniul de definiţie al funcţiei.

c) **Determinarea coordonatelor vârfului** parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $x_V = -\frac{b}{2a}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$;

d) **Calculul**, eventual, a **altor valori** ale funcţiei;
e) Întocmirea **tabelului** de **valori**;
f) **Trasarea graficului** funcţiei care este o parabolă.

Semnul funcţiei de gradul al doilea

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbf{R}^*$, $b, c \in \mathbf{R}$,

i) dacă $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	semnul lui **a**

ii) dacă $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2+bx+c$		semnul lui **a**	0	semnul lui **a**	

iii) dacă $\Delta > 0$ pentru $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2+bx+c$		semnul lui **a**	0	semn contrar lui **a**	0	semnul lui **a**	

Monotonia funcţiei de gradul al doilea

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbf{R}^*$, $b, c \in \mathbf{R}$,

i) Dacă $a > 0$, funcţia f este **strict descrescătoare** pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ şi **strict crescătoare** pe intervalul $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$;

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2+bx+c$		$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	

ii) Dacă $a < 0$, funcţia f este **strict crescătoare** pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ şi este **strict descrescătoare** pe intervalul $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$;

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y = f(x) = ax^2+bx+c$		$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	

Maximul sau minimul funcţiei de gradul al doilea

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbf{R}^*$, $b, c \in \mathbf{R}$,

i) Dacă $a > 0$, funcţia f are un **minim** egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ care se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$;

ii) Dacă $a < 0$, funcţia f are un **maxim** egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ care se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$;

Ecuaţia de gradul al II-lea

Forma generală a ecuaţiei de gradul al doilea : $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$;

Rezolvare

– se determină valorile coeficienţilor: **a**, **b**, **c;**

– se calculează: $\Delta = b^2 - 4ac$

Discuţie

1) dacă $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin R$, $S = \Phi$, – în R nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ;

2) dacă $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ atunci trinomul este un pătrat perfect:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2;$$

!!!! Atenţie la valorile negative ale coeficientului a .

3) dacă $\Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$, $x_1 \neq x_2$.

Descompunerea trinomului de gradul al II-lea

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);}$$

Relaţiile lui Viete pentru trinomul de gradul al II-lea

Fie x_1, x_2 – rădăcinile ecuaţiei: $ax^2 + bx + c = 0$. ($a \neq 0$) atunci : $\mathbf{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$; $\mathbf{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$.

Formarea ecuaţiei de gradul al II – lea

Pentru o ecuaţie de forma : $ax^2 + bx + c = 0$, când se cunosc rădăcinile x_1, x_2, se determină

$S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1 \cdot x_2$ atunci :

$$\mathbf{x^2 - Sx + P = 0.}$$

FUNCŢIA PUTERE

Funcţia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{f(x) = x^n}$, $\mathbf{n \in N^*, n > 2}$, se numeşte **funcţia putere cu exponent număr natural**

Funcţiei putere cu exponent număr întreg negativ

Funcţia $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{f(x) = x^{-n}} = \frac{1}{x^n}$, se numește **funcţia putere cu exponent număr întreg negative.**

FUNCŢIA RADICAL

Funcţia radical de ordin par

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\mathbf{f(x)} = \sqrt[2n]{x}$, $\mathbf{n} = 1,2,3,...$

Funcţia radical de ordin impar

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{f(x)} = \sqrt[2n+1]{x}$, $\mathbf{n} = 1,2,3,...$

ECUAȚII IRAȚIONALE

Ecuațiile iraționale sunt ecuații în care necunoscuta apare sub semnul radical.

Rezolvare

- punerea condițiilor de existență a radicalilor de ordin par;
- eliminăm radicalii prin diferite transformări (ridicări la putere, introducerea unor necunoscute auxiliare, amplificări cu expresii conjugate, etc.) obținând ecuații mai simple de tip cunoscut;
- verificăm dacă soluțiile obținute verifică condițiile puse și astfel determinăm soluțiile ecuației iraționale.

Tipuri de ecuații iraționale

1) Ecuații de forma $\sqrt[n]{f(x)} = g(x), n \in \{2;3\}$

   Dacă n este par se impugn condițiile de existență $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$.

   $$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \uparrow^n \Leftrightarrow f(x) = g^n(x)$$

2) Ecuații de forma $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[p]{g(x)} = h(x)$, $n, p \in \{2;3\}$

   Cazuri particulare: a) n=p=2

   $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $h(x) \geq 0$

   Metoda 1 Eliminarea radicalilor prin ridicare la putere (folosim formula de calcul $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$)

   Metoda 2 Folosirea expresiilor conjugate
   Metoda 3 Folosirea unor notații sau substituții
   Metoda 4 Folosirea sistemelor de ecuații

   b) n=p=3

   Metoda 1 Eliminarea radicalilor prin ridicare la putere (folosim formula de calcul $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a+b)$
   Metoda 2 Folosirea expresiilor conjugate
   Metoda 3 Folosirea unor notații sau substituții
   Metoda 4 Folosirea sistemelor de ecuații

FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

$f : \mathbf{R} \to (0,\infty)$, $\mathbf{f(x) = a^x}$, $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$

ECUAȚII EXPONENȚIALE

Ecuațiile exponențiale sunt ecuații care conțin variabila necunoscută la exponetul puterii.

Tipuri de ecuații exponențiale

1) Ecuații de forma $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$$

2) Ecuații de forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Observație: Ecuatiile de tipul $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) se pot scrie astfel: $a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}$

3) Dacă ecuația exponențială este de tipul $F(a^{f(x)}) = 0$, ($a > 0$, $a \neq 1$) atunci prin intermediul substituției $t = a^{f(x)} > 0$, se obține ecuația $F(t) = 0$, care de regulă se rezolvă mai simplu. În cele mai frecvente cazuri se întâlnesc ecuațiile de tipul

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0,$$

$$A \cdot a^{f(x)} + C \cdot a^{-f(x)} + B = 0$$

(A, B, $C \in \mathbf{R}$), care cu ajutorul substituției $t = a^{f(x)}$ se reduc la ecuația:

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

FUNCȚIA LOGARITMICĂ

$$f : (0, \infty) \to \mathbf{R},\ \mathbf{f(x) = \log_a x},\ a \in (0, \infty),\ a \neq 1$$

ECUAȚII LOGARITMICE

Ecuațiile logaritmice sunt ecuații care conțin necunoscuta sub semnul logaritmului sau (și) în baza lui.

Tipuri de ecuații logaritmice

1) Cea mai simplă ecuație logaritmică este ecuația de tipul: $\log_a x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$) $\Leftrightarrow x = a^b$.

2) Ecuații de forma $\log_{f(x)} g(x) = a$, ($f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$) $\Leftrightarrow g(x) = f(x)^a$

3) Ecuații de forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, ($a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

4) Ecuații de forma $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$).

5) Ecuații de forma $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x)$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$).
   În rezolvare se utilizează proprietățile logaritmilor.

$$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B),\ (a > 0,\ a \neq 1,\ A > 0,\ B > 0);$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B},\ (a > 0,\ a \neq 1,\ A > 0,\ B > 0)$$

6) Ecuații de forma $F(\log_a x) = 0$, unde $F(x)$ este o funcție algebrică rațională. Prin intermediul substituției: $\log_a x = t$ se reduce la o ecuație algebrică în raport cu t, $R(t) = 0$.

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

Tabelul valorilor particulare pentru funcţiile triginometrice

x^0 / $f(x^0)$	0^0	30^0 $\frac{\pi}{6}$	45^0 $\frac{\pi}{4}$	60^0 $\frac{\pi}{3}$	90^0 $\frac{\pi}{2}$	120^0 $\frac{2\pi}{3}$	180^0 π	270^0 $\frac{3\pi}{2}$	360^0 2π
$\sin x^0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos x^0$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$tg\, x^0$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	0	nu există	0
$ctg\, x^0$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	nu există	0	nu există

Formule fundamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cos x \neq 0;$$

$$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sin x \neq 0;$$

$$tg\, x \cdot ctg\, x = 1,\quad \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 .$$

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x},$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Într-un ΔABC cu $m(\hat{A}) = 90^0$ și $m(\hat{B}) = x \Rightarrow m(\hat{C}) = 90^0 - x$

$$\cos x = \sin(90^0 - x),$$
$$\sin x = \cos(90^0 - x),$$
$$tg\, x = ctg(90^0 - x),$$
$$ctg\, x = tg(90^0 - x).$$

Observație:

$$\sin(90^0 + x) = \cos x,$$
$$\cos(90^0 + x) = -\sin x,$$
$$tg(90^0 + x) = -ctg\, x,$$
$$ctg(90^0 + x) = -tg\, x.$$

REDUCEREA LA PRIMUL CADRAN

Cadranul II→ I $\sin(180^0 - x) = \sin x$, $\cos(180^0 - x) = -\cos x$, $tg(180^0 - x) = -tg\,x$, $ctg(180^0 - x) = -ctg\,x$,

Cadranul III→ I $\sin(x - 180^0) = -\sin x$, $\cos(x - 180^0) = -\cos x$, $tg(x - 180^0) = tg\,x$, $ctg(x - 180^0) = ctg\,x$,

Cadranul IV→ I $\sin(360^0 - x) = -\sin x$, $\cos(360^0 - x) = \cos x$, $tg(360^0 - x) = -tg\,x$, $ctg(360^0 - x) = -ctg\,x$.

FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE INVERSE

Definiții: Funcția $f:[-1;1]\to[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$ se numește **funcția arcsinus**.
Funcția $f:[-1;1]\to[0;\pi]$, $f(x) = \arccos x$ se numește **funcția arccosinus**.
Funcția $f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, $f(x) = arctg\,x$ se numește **funcția arctangentă**.
Funcția $f:\mathbb{R}\to(0;\pi)$, $f(x) = arcctg\,x$ se numește **funcția arccotangentă.**

Formule paritate

$\sin(-x) = -\sin x$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
$\cos(-x) = \cos x$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$tg(-x) = -tg\,x$ $arctg(-x) = -arctg\,x$
$ctg(-x) = -ctg\,x$ $arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$

Formule periodicitate

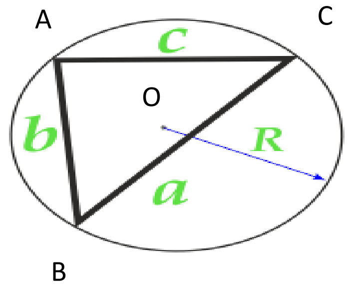
$\sin(2k\pi + x) = \sin x$ $tg(k\pi + x) = tg\,x$
$\cos(2k\pi + x) = \cos x$ $ctg(k\pi + x) = ctg\,x$, $k\in\mathbb{Z}$

Alte formule utile

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

TEOREMA SINUSURILOR



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

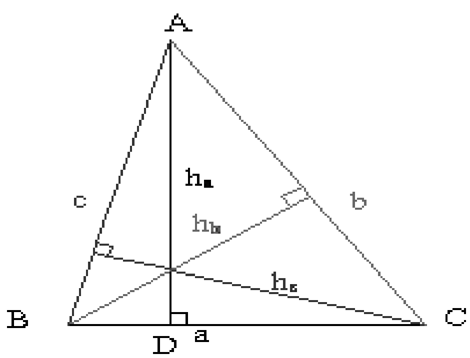
$a = 2R \sin \hat{A}$; $b = 2R \sin \hat{B}$; $c = 2R \sin \hat{C}$.

TEOREMA COSINUSULUI

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

FORMULE PENTRU CALCULUL ARIEI UNUI TRIUNGHI



$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}; \ S = \frac{b \cdot h_b}{2}; S = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}; S = \frac{a \cdot c \cdot \sin \hat{B}}{2}; S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2}$$

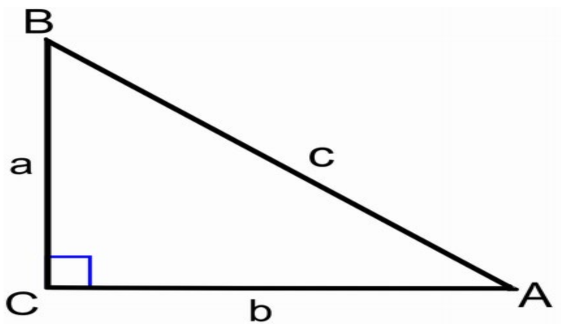
$S = p \cdot r$, unde r – este raza cercului înscris în triunghi.

$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, unde R – este raza cercului circumscris triunghiului.

Formula lui Heron:

$\mathbf{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ – semiperimetrul triunghiului.

Pentru triunghiul echilateral : $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, iar $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, unde ℓ – este lungimea laturii triunghiului;



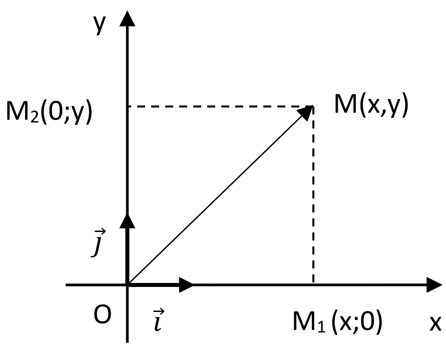
Pentru triunghiul dreptunghic ABC, m $(\hat{C}) = 90^0$**:**

$$S_{ABC} = \frac{CB \cdot CA}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

sau dacă : CB = c_1 și CA = c_2, atunci:

$$S_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

Versori



Vectorii : $\vec{i}$ – pe Ox şi $\vec{j}$ – pe Oy se numesc versorii axelor , au modulul 1.($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$)

Într-un asemenea reper , un vector $\overrightarrow{OM}$ se exprimă în mod unic sub forma : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x, y $\in$ **R**

sau $\overrightarrow{OM}$ (x, y).

Modulul unui vector în plan

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Fie punctele M_1 (x_1, y_1) şi M_2 (x_2, y_2), vectorul $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ are coordonatele

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ (x_2 - x_1 ,\ y_2 - y_1)$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vectori coliniari

Fie $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x, y $\in$ **R** , $\Rightarrow$ $\exists$ a $\in$ **R*** , astfel încât $\vec{u} = a x\vec{i} + a y\vec{j}$.

Fie $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_1 = a\vec{v}_2$ şi $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a$

Vectori perpendiculari

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

Distanţa dintre două puncte din plan

$$d(M_1 , M_2) = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Coordonatele unui punct care împarte un segment într – un raport dat

Fie punctele A_1 (x_1, y_1) şi B_2 (x_2, y_2) şi un punct M(x,y) care împarte segmentul [AB] în raportul

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow x_M = \frac{x_1 - kx_2}{1-k},\ y_M = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}$$

Coordonatele mijlocului unui segment

Fie punctele A (x_1, y_1) şi B (x_2, y_2) şi un punct $M(x_M, y_M)$ care împarte segmentul [AB] în raportul $\frac{MA}{MB} = 1$ (MA = MB, adică M este mijlocul segmentului [AB])

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Coordonatele centrului de greutate al triunghiului

Fie punctele A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) şi C (x_3, y_3) şi un punct $G(x_G, y_G)$, centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile A, B, C.

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

DIFERITE FORME ALE ECUAŢIEI UNEI DREPTE ÎN PLAN

Ecuaţia generală a dreptei $\mathbf{ax + by + c = 0}$

Ecuaţia carteziană explicită a dreptei $\mathbf{y = mx + n}$

Ecuaţia dreptei determinată de un punct $M_0(x_0, y_0)$ şi o **pantă m**

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};\ \text{Panta este: } \mathbf{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuaţi dreptei prin tăieturi $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \mathbf{1 = 0;}$

Cele două puncte de tăieturi cu axele (intersecţiile dreptei cu axele de coordonate) sunt :
A(a, 0), B(0, b).

Condiţia de paralelism a două drepte din plan

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile: y = mx + n şi y = m'x + n' $\Rightarrow$ **m = m'.**

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile: $d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

Condiţia de perpendicularitate a două drepte din plan

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile: y = mx + n şi y = m'x + n' $\Rightarrow 1 + m' \cdot m = 0$ sau $m' = -\frac{1}{m}$

sau $\mathbf{m' \cdot m = -1}$

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile: $d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie punctul M_0 (x_0, y_0) şi dreapta d : ax + by + c = 0

$$\mathbf{d\ (M_0,\ d)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Aria triunghiului

Fie punctele A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) şi C (x_3, y_3). Aria triunghiului ABC este:

$$\mathbf{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot |x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)|.$$

TESTE PROPUSE
SUBIECTUL I BACALAUREAT

TESTUL 1

1) Arătați că: $4\cdot(4 - \frac{3}{8}:\frac{1}{4}) = 10$.

2) Se consideră funcțiile: f, g :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x)= x + 2 și g(x)= – x + 4. Determinați punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{2+x} = \frac{1}{4}$.

4) Un produs costă 120 lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 30%.

5) Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile A(-4,3), B(-4, 0) și C(0, 4). Calculați aria triunghiului ABC.

6) Arătați că $\sin^2 120°+\sin^2 30°=1$.

TESTUL 2

1) Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 5$ și $a_2 = 8$.

2) Se consideră ecuația $x^2 - 5x + 2=0$. Arătați că $3x_1 \cdot x_2 - (x_1+x_2) = 1$.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4 – x)= 1$.

4) Calculați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, acesta să fie multiplu de 4.

5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0,-3) și B(-4,0). Calculați perimetrul triunghiului OAB.

6) Dacă $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Calculați $tg^2 x-1$.

TESTUL 3

1) Arătați că $(3 + \frac{1}{3}):\frac{5}{3} = 2$.

2) Arătați că $\frac{x_1 + x_2+1}{x_1 \ x_2}$ =1, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x + 3 = 0$.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = \frac{1}{32}$.

4) Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 20.

5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(0;3), B(2;2) și C(a;3), unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

6) Se consideră triunghiul ABC cu AB = $5\sqrt{3}$, AC=5 și sinB = $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Calculați sin $\widehat{C}$

TESTUL 4

1) Arătați că $2(1-\frac{1}{2})(2-\frac{2}{3})(3-\frac{3}{4})= 3.$

2) Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)= x^2 + 1$. Determinați numerele reale a pentru care

$f(a) + f(1-a) = 7$.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x$

4) Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea M={10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60}, acesta să fie divizibil cu 10.

5) În reperul cartezian xOy punctele A(8;2) și B(2;-6). Calculați lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.

6) Calculați $2\cdot\sin 45°\cos 45° - \sin^2 60° - \cos^2 30°$.

TESTUL 5

1) Determinați al patrulea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3 = 10$ și $a_5 = 20$.

2) Se consideră funcțiile $f, g :\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)= x^2 + 2x - 3$ și $g(x)= 1- x^2$. Calculați punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții.

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}\cdot 4^{2x} \cdot 8^{x+1} =16^x$.

4) Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre , acesta să se dividă cu 10.

5) În reperul cartezian xOy se consideră punctul A(a−1; a+1), unde a este un număr real. Determinați numărul real a știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație y = 2x + 1.

6) Determinați măsura unghiului A al triunghiului ABC, știind că BC = $3\sqrt{2}$, AC = 6 și $m(\sphericalangle B)= 45°$.

TESTUL 6

1) Determinați $x\in(0,\infty)$ pentru care numerele 3, x+3, 12 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

2) Se consideră funcția funcția $f :\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)= x^{2020} - x^2 +1$. Demonstrați că: $f(-2) - f(-1) + f(1) - f(2) = 0$,

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x-1) - \log_3 x = 1$.

4) Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{w}=4\vec{i} + 2\vec{j}$. Determinați numerele reale x, y cu proprietatea $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$.

5) În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 2x - 4$ și punctul $A(-2;2)$. Determinați ecuația dreptei d_1 care trece prin A și este paralelă cu d.

6) Arătați că $\sin(a+b) = \frac{63}{65}$, știind că $a,b \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{5}{13}$.

TESTUL 7

1) Se consideră numărul $a = \log_3 2$. Calculați $\log_3 12$.

2) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2 + x - 6 < 0$.

3) Calculați suma $2 + 6 + 10 + ... + 36$.

4) Calculați probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{16}, \sqrt{18}, \sqrt{20}\}$, acesta să fie număr rational.

5) Determinați ecuația dreptei care conține punctul $A(3,-4)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.

6) Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=4$, $AC=8$ și $m(\sphericalangle A) = 60°$.

TESTUL 8

1) Demonstrați că numărul $(2-3i)\cdot(1+2i) - (1+3i)\cdot(1-2i)$ este întreg.

2) Demonstrați că ecuația $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$ admite soluții reale distincte, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

3) Considerăm dezvoltarea $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{20}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$. Determinați termenul care nu îl conține pe x.

4) Determinați soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{1+x} = x - 1$

5) Demonstrați că dreptele de ecuație $d_1: 2x + 3y - 2 = 0$ și $d_2: 9x - 6y + 5 = 0$ sunt perpendiculare.

6) Se consideră expresia $E(x) = \cos x + \sin\frac{x}{2} + \text{tg}\,\frac{x}{2}$, unde x este un număr real. Calculați $E(60°)$.